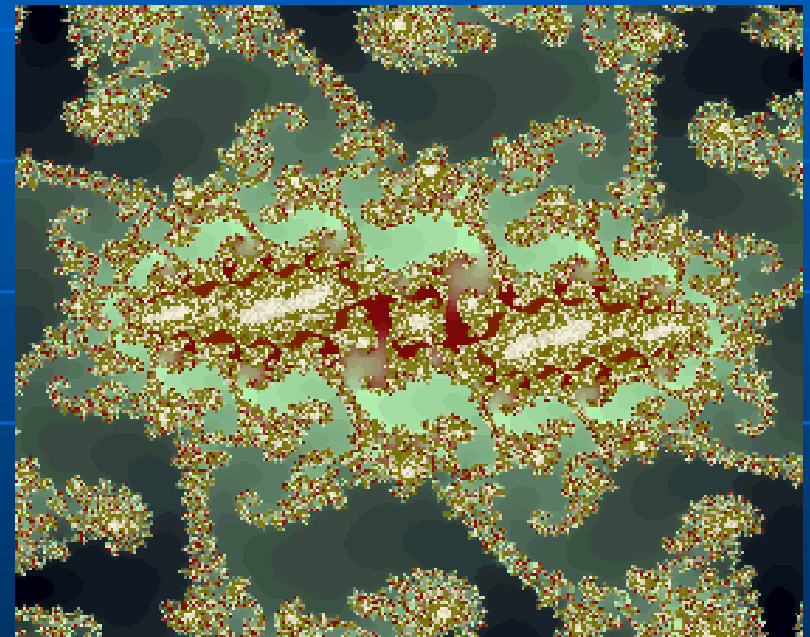
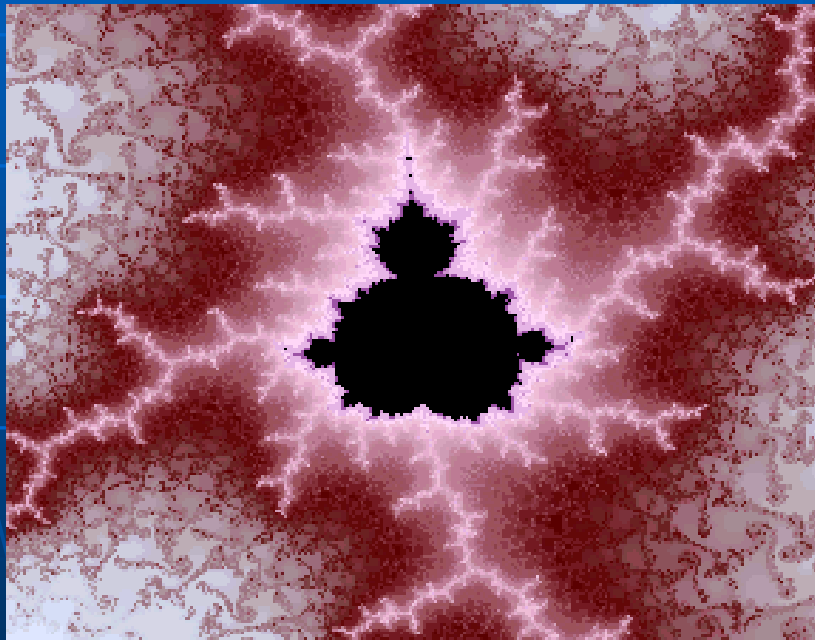


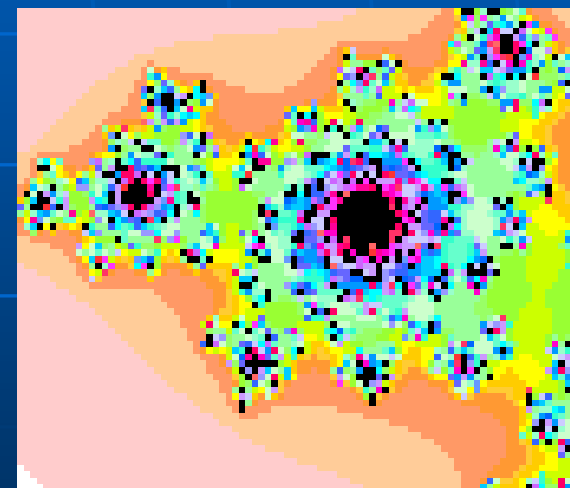
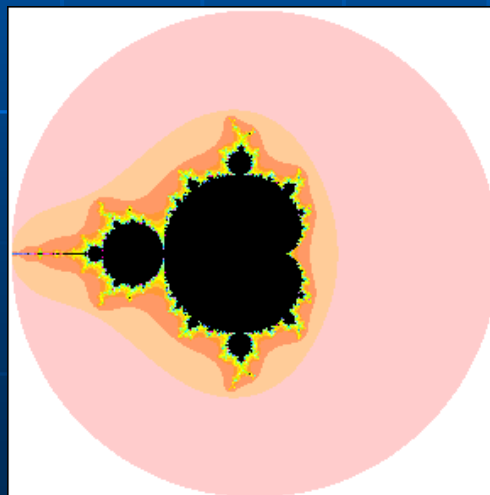
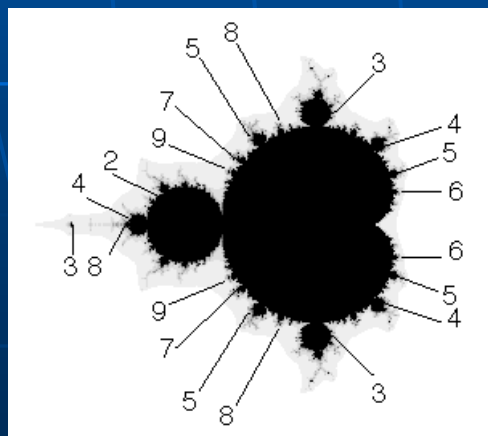
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури Манделбровов скуп и скупови Џулија



Фрактална геометрија и фрактали у архитектури Манделбровтов скуп и скупови Џулија

Манделбровтов скуп представља јединство једноставности и комплексности. Веома једноставне формуле које садрже само множење и сабирање комплексних бројева генеришу веома сложене и природно лепе фигуре – слике са бесконачно много варијација.

$$(x + iy)^2$$



Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

Манделбровов скуп и скупови Џулија комплексне итерације

Итеративни процес у комплексној равни који генерише Манделбровов скуп и Џулија скупове је веома једноставног облика

$z \rightarrow z^2 + c$ где су z и c комплексни бројеви.

Процес започиње избором комплексних бројева z_0 и c , и полазећи од њих генерише се низ комплексних бројева

$$z_1 = z_0^2 + c$$

$$z_2 = z_1^2 + c$$

$$z_3 = z_2^2 + c$$

.....

У општем облику

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

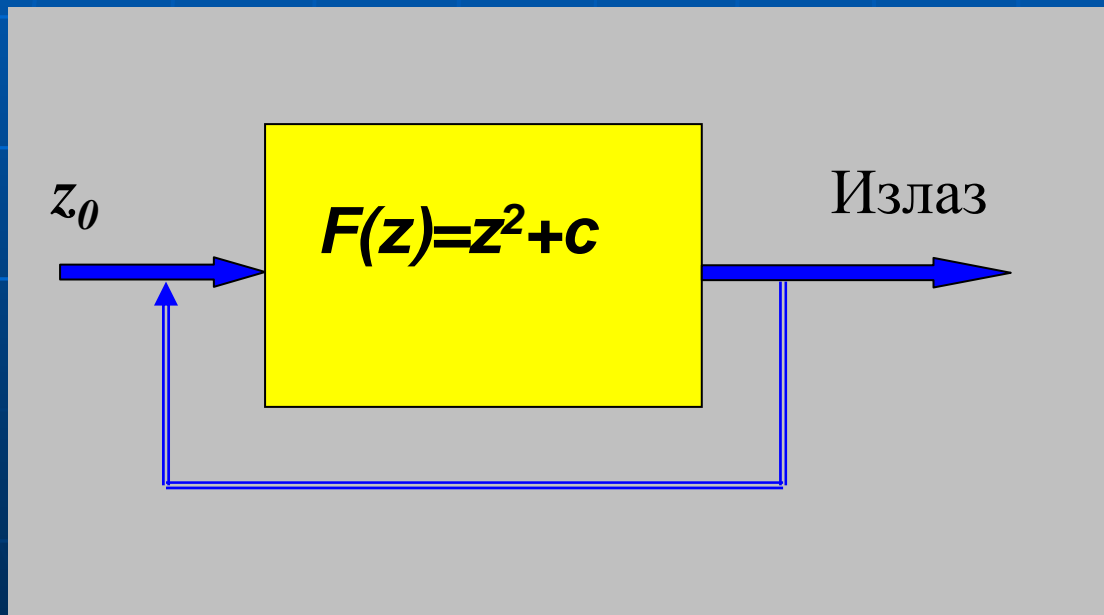
z_0 - почетна вредност

c - параметар

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури Манделбровов скуп и скупови Џулија комплексне итерације

Описан итеративни процес

$z \rightarrow z^2 + c$, где су z и c комплексни бројеви, представља типичан пример итеративног функционалног система.



z_0 - почетна вредност

c - вредност параметра

$$z_1 = z_0^2 + c$$

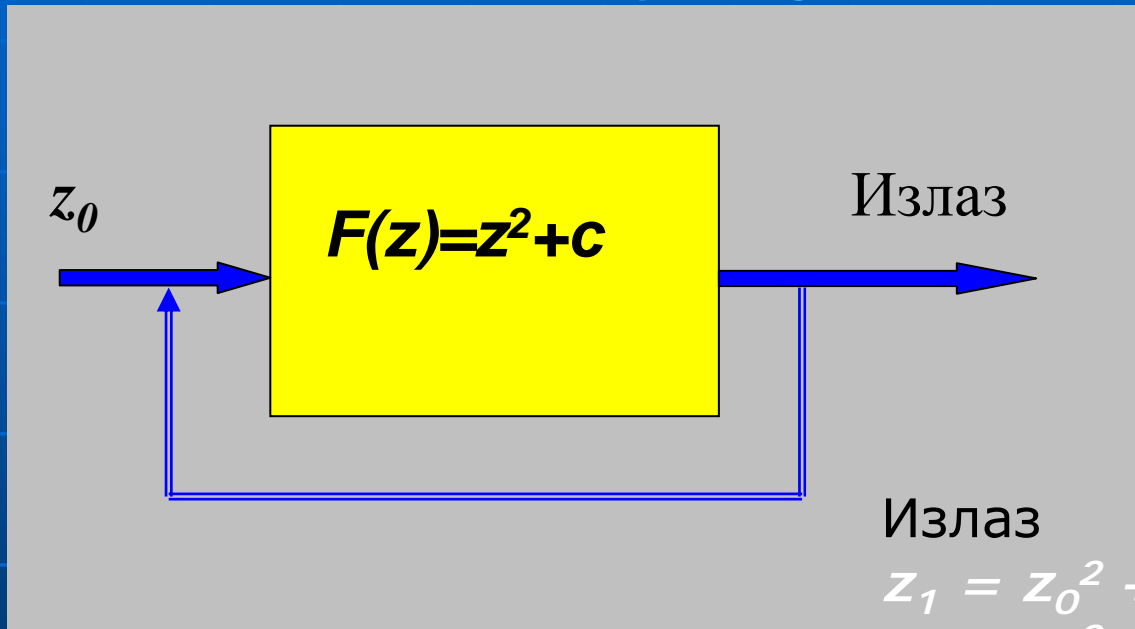
$$z_2 = z_1^2 + c$$

$$z_3 = z_2^2 + c$$

.....

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури Манделбровов скуп и скупови Џулија комплексне итерације



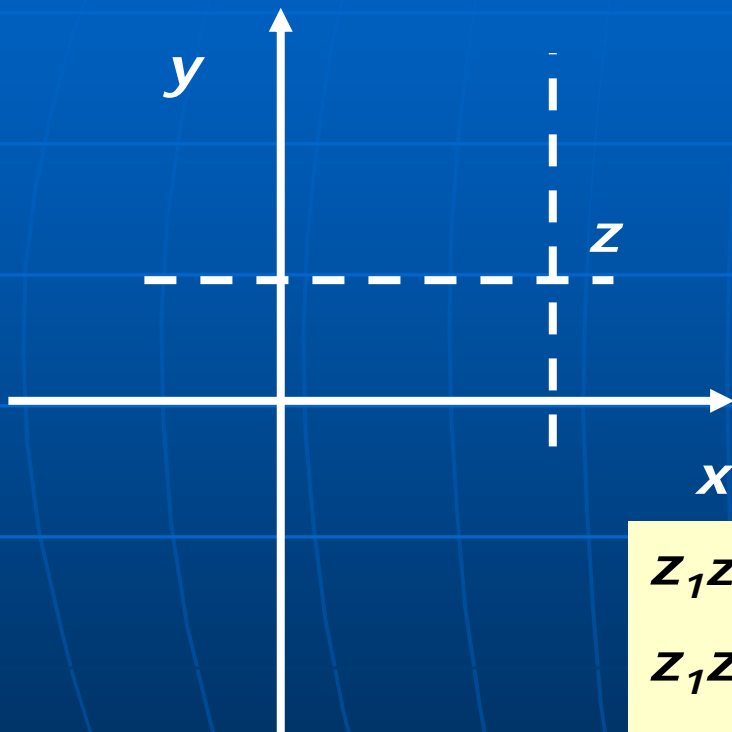
Излаз

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 + c && \text{ прва итерација} \\ z_2 &= z_1^2 + c && \text{ друга итерација} \\ z_3 &= z_2^2 + c && \text{ трећа итерација} \\ &\dots\dots\dots && \\ z_{n+1} &= z_n^2 + c && \text{ n-та итерација} \end{aligned}$$

z_0 - почетна вредност - улаз

c – вредност параметра

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
Манделбровов скуп и скупови Џулија
аритметика комплексних бројева



$$z = (x, y)$$

$$z = x + iy$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \quad i^2 = -1$$

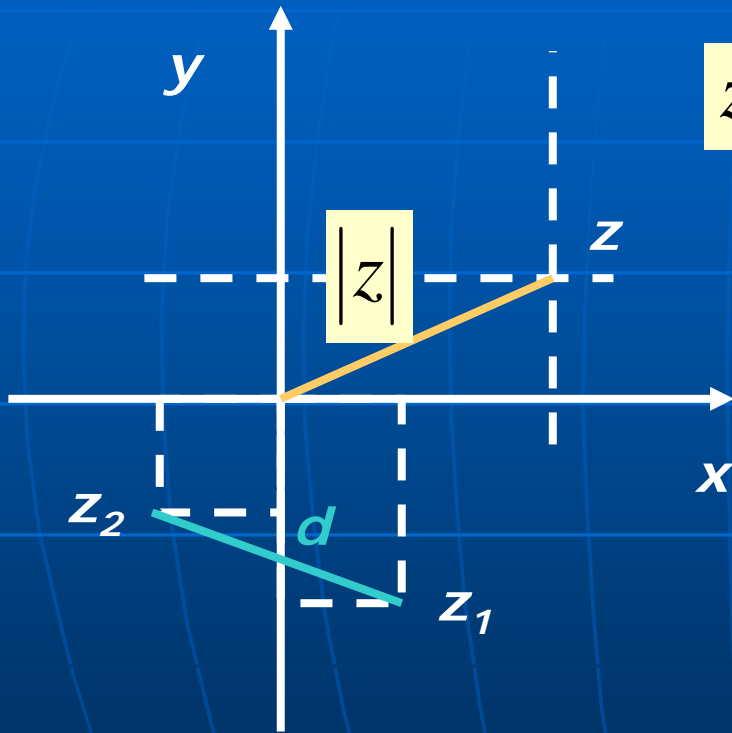
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z = x + iy \quad z^2 = (x^2 - y^2) + i 2xy$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

Манделбровов скуп и скупови Џулија

аритметика комплексних бројева



$$z = (x, y) \quad z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy$$

$$|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$|z|$$

Модуо
комплексног броја
(растојање од
координатног
почетка)

$$d = d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

— Међусобно растојање
тачака z_1 и z_2

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

Манделбровов скуп и скупови Џулија комплексне итерације

$$z_n = x_n + iy_n$$

$$z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$$

$$c = a + ib$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_{n+1} = (x_n^2 - y_n^2 + a) + i(2x_n y_n + b)$$

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b$$

$$z = (x, y)$$

$$z = x + iy$$

Итеративни
процес:

$$z \rightarrow z^2 + c:$$

$$x \rightarrow x^2 - y^2 + a$$

$$y \rightarrow 2xy + b$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

Манделбровов скуп и скупови Џулија комплексне итерације - пример

$$c = (a, b) = (1/2, -1/2) \quad c = 1/2 - (1/2)i$$

$$z_0 = (x_0, y_0) = (0, 0) \quad z_0 = 0$$

$$x_1 = x_0^2 - y_0^2 + a = 0^2 - 0^2 + 1/2 = 1/2$$

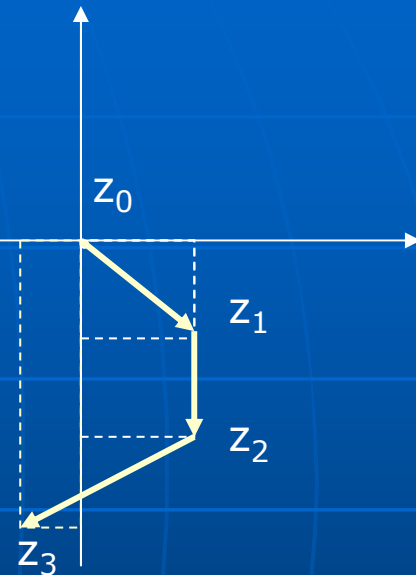
$$y_1 = 2 * x_0 * y_0 + b = 2 * 0 * 0 + (-1/2) = -1/2$$

$$x_2 = x_1^2 - y_1^2 + a = (1/2)^2 - (-1/2)^2 + 1/2 = 1/2$$

$$y_2 = 2 * x_1 * y_1 + b = 2 * (1/2) * (-1/2) + (-1/2) = -1$$

$$x_3 = x_2^2 - y_2^2 + a = (1/2)^2 - (-1)^2 + 1/2 = -1/4$$

$$y_3 = 2 * x_2 * y_2 + b = 2 * (1/2) * (-1) + (-1/2) = -3/2$$



$$z_1 = 1/2 - (1/2)i, \quad z_2 = 1/2 - i, \quad z_3 = -1/4 - (3/2)i, \dots$$

$$z_1 = (1/2, - (1/2)), \quad z_2 = (1/2, -1), \quad z_3 = (-1/4, - (3/2)), \dots$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури Манделбровов скуп и скупови Џулија поље Џулија скупа

Поље Џулија скупа K_c се дефинише за сваки комплексни број c .

За сваку тачку z_0 комплексне равни, генерише се низ z_1, z_2, z_3, \dots помоћу итерационог правила $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Ако низ не одлази у бесконачност (ограничен је – не тежи бесконачности), z_0 припада K_c ;
ако низ одлази у бесконачност (није ограничен - тежи бесконачности), z_0 не припада пољу K_c .

Критеријум: Ако је неки члан низа z_j , на одстојању већем од два, од координатног почетка $(|z_j| > 2)$ низ одлази далеко у бесконачност и

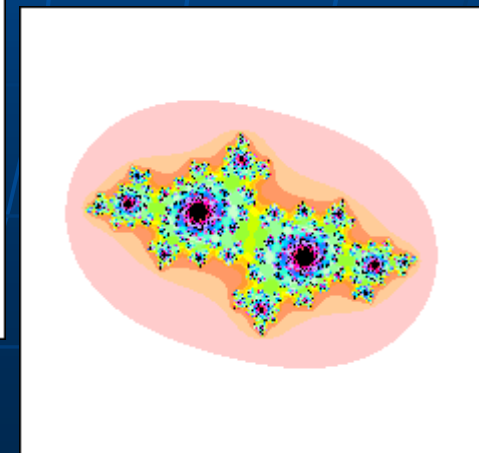
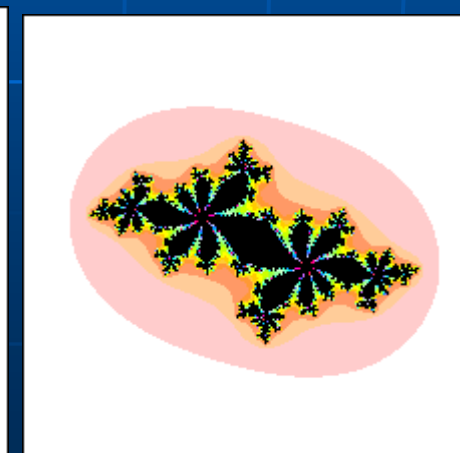
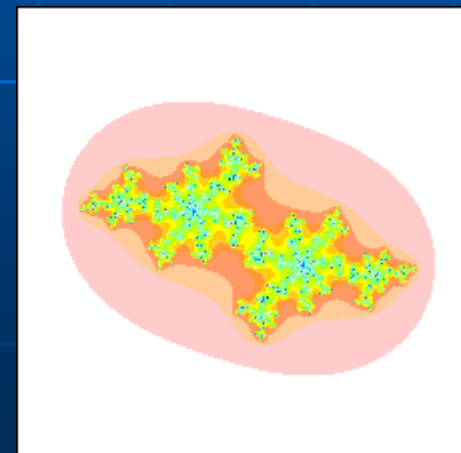
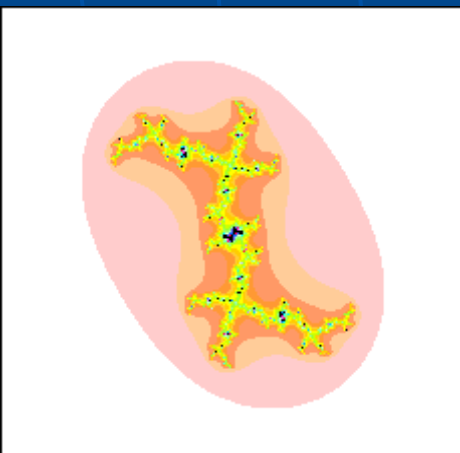
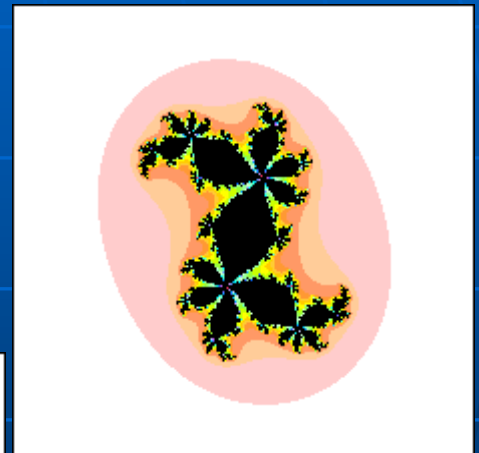
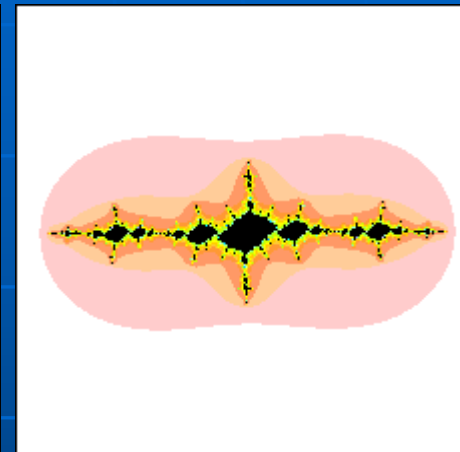
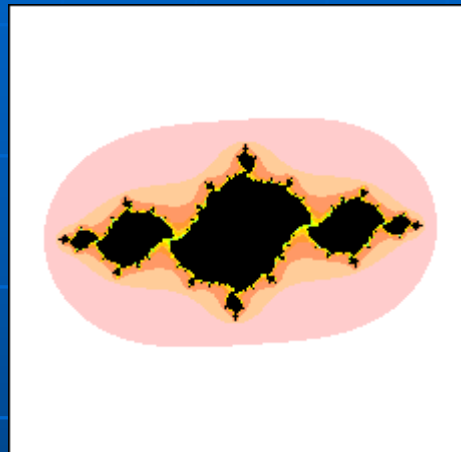
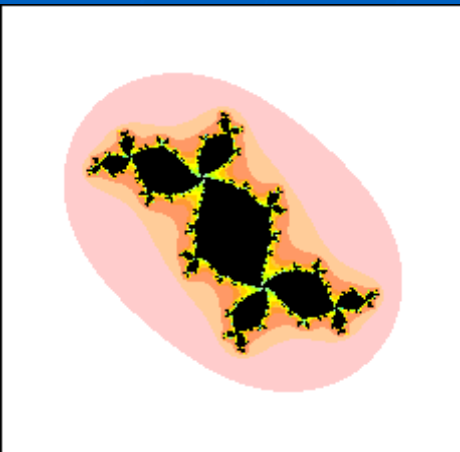
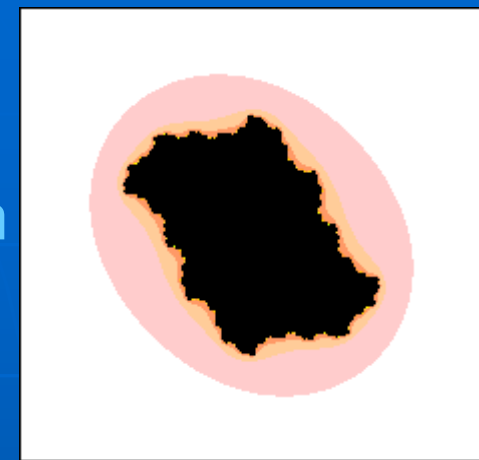
z_0 не припада пољу K_c .

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури Манделбровов скуп и скупови Џулија поље Џулија скупа

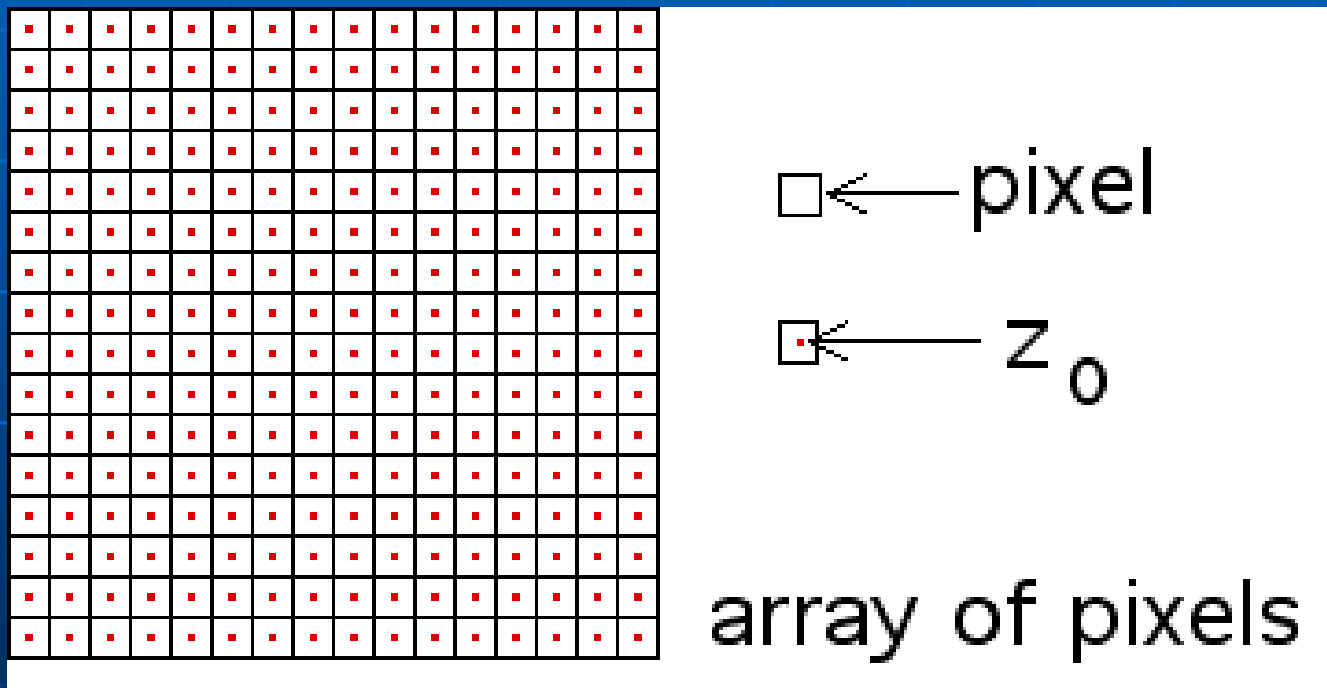
Критеријум: Ако је неки члан низа z_j , на одстојању већем од два, од координатног почетка z_0 не припада пољу K_c .

Број итерација потребан да се дође до члана низа на одстојању већем од два, од координатног почетка може бити велики. Да би се остварио у реалном времену, потребно је увести ограничење: максималан број итерација N . Уколико после тог броја итерација растојање није веће од два, сматра се да z_0 припада пољу K_c .

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
Манделбровов скуп и скупови Џулија
примери поља Џулија скупова



Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
Манделбровов скуп и скупови Џулија
коначна резолуција



Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Манделбровов скуп и скупови Џулија
поље Џулија скупа – колор шема

За свако z_0 (пиксел) комплексне равни формира се итеративни низ.

Пиксел z_0 се боји бело ако је $|z_1| > 2$.

Пиксел z_0 се боји црно ако припада пољу K_c односно ако ни после максималног броја од N итерација ни за један члан низа не важи $|z_j| > 2$.

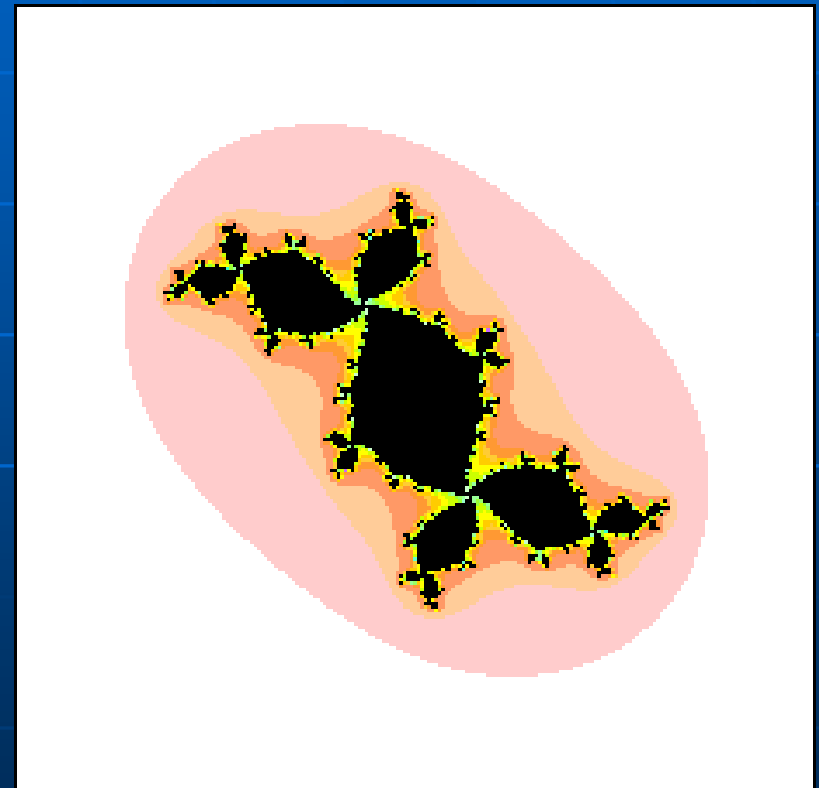
У осталим случајевима, пиксел z_0 се боји различитим бојама или различитим нијансама исте боје зависно од броја извршених итерација

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
Манделбровов скуп и скупови Џулија
поље Џулија скупа – колор шема

Пиксел z_0 се боји бело
ако је z_1 на растојању
већем од два од
координатног почетка

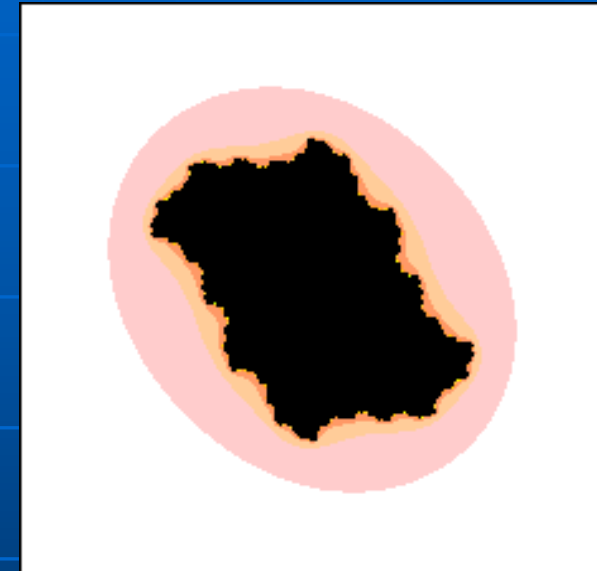
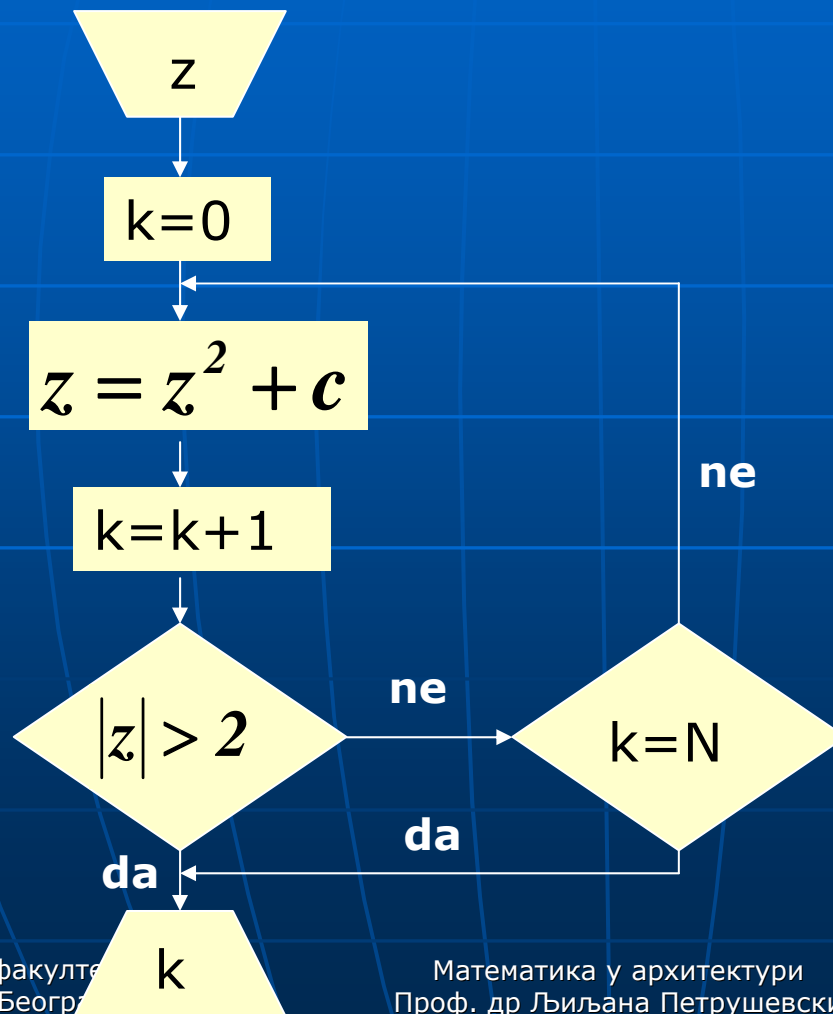
Пиксел z_0 се боји црно
ако припада пољу K_c

Пиксел z_0 се боји у
нијансама од светлог до
тамног пинк са увећањем
броја итерација.



Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

Манделбровтов скуп и скупови Џулија поље Џулија скупа – колор шема



k=1 бело

k=N црно

Остале вредности
k су различити
тонови пинк боје

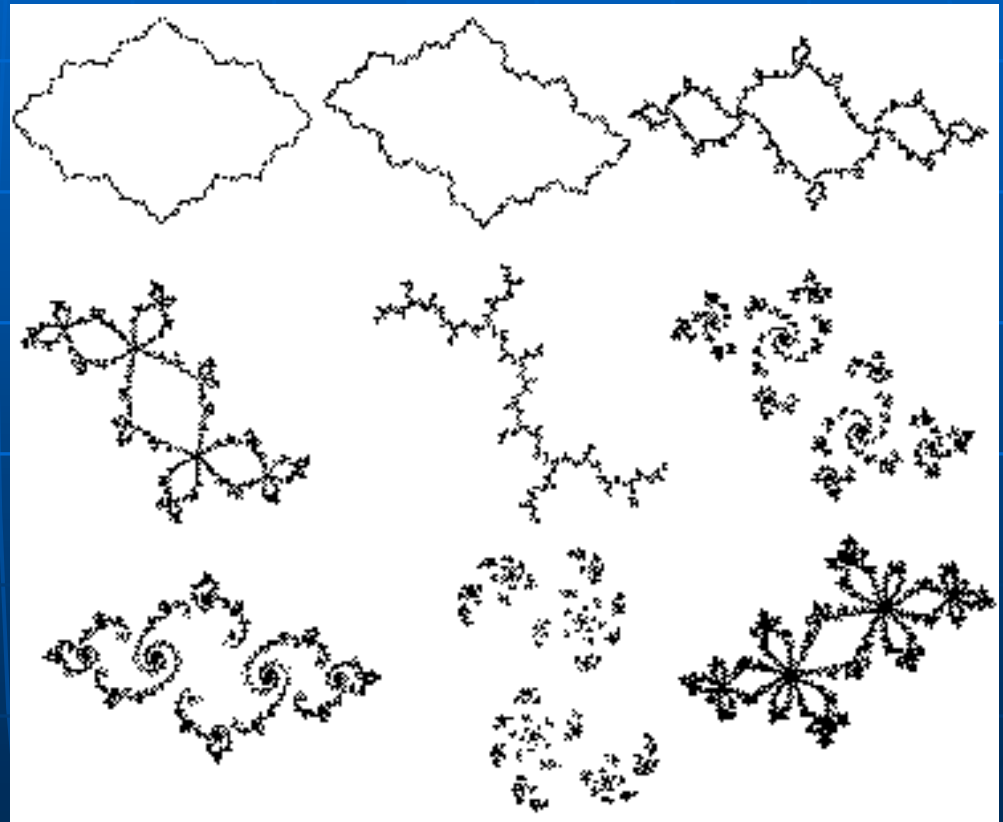
Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

Манделбровов скуп и скупови Џулија
Џулија скупови

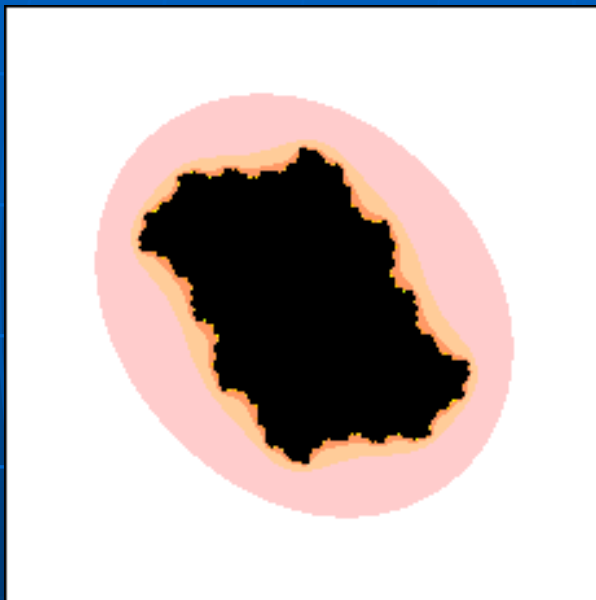
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Џулија скуп J_c је
граница поља K_c .

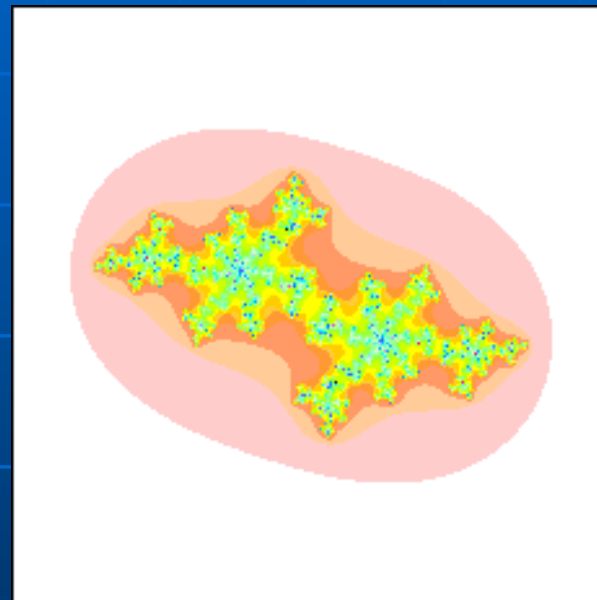
Исти итеративни
процес за различите
вредности параметра c
генерише различите
Џулија скупове.



Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
Манделбровтов скуп и скупови Џулија
Џулија скупови - примери



J_c – затворена
крива линија



$J_c = K_c$ – скуп неповезаних
тачака

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

Манделбровов скуп и скупови Џулија

Манделбровов скуп

Манделбровов скуп настаје у истом итеративном процесу који се користи за Џулија скупове, али се примењује на други начин.

Џулија скупови настају у комплексној равни различитих вредности z_0 (**динамичка раван**) за различите вредности параметра c (**параметарска раван**).

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

Манделбровов скуп и скупови Џулија

Манделбровов скуп

За Манделбровов скуп M почетна вредност је $z_0=0$ и формира се у параметарској равни истом логиком као и Џулија скупови.

За сваку тачку C комплексне параметарске равни, генерише се низ z_1, z_2, z_3, \dots помоћу итерационог правила $z_{n+1} = z_n^2 + C$.

Ако низ не одлази у бесконачност C припада скупу M ; ако низ одлази у бесконачност, C не припада M .

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

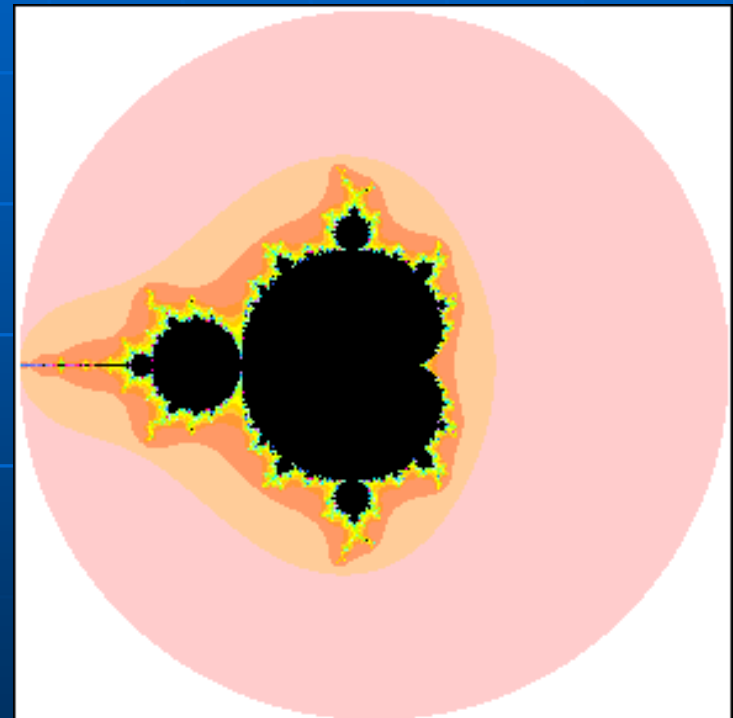
Манделбровов скуп и скупови Џулија

Манделбровов скуп

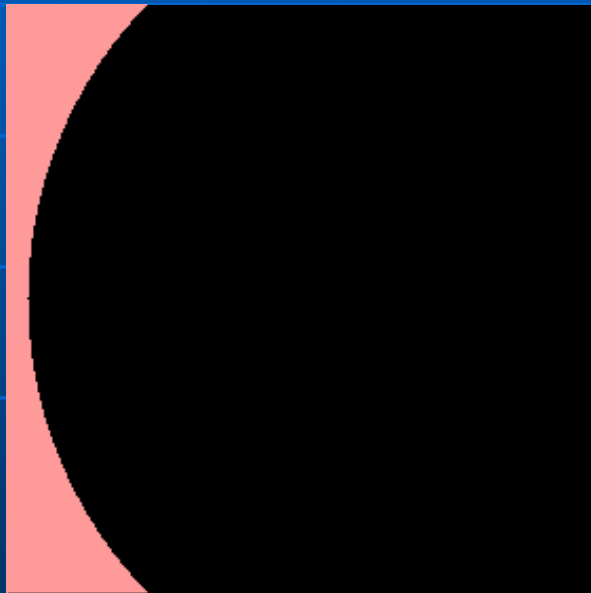
Критеријуми за припадност скупу и боје пиксела је исти као и за поље Џулија скупова.

Како је у првој итерацији $z_1 = c$, граница беле боје односно граница бојеног дела и беле боје је круг

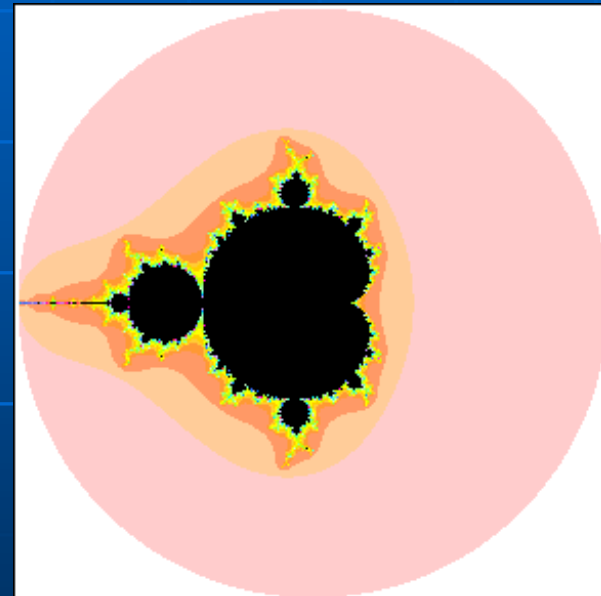
$$|c| = 2$$



Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
Манделбровов скуп и скупови Џулија
Манделбровов скуп
ефекат максималног броја итерација

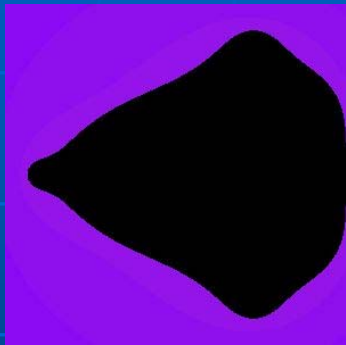


N=1



N=25

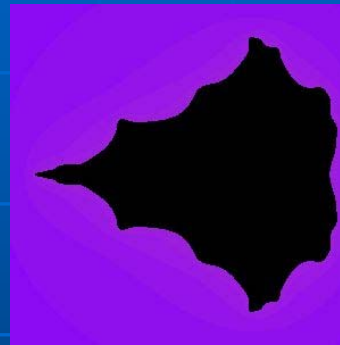
Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
Манделбровов скуп и скупови Џулија
Манделбровов скуп
ефекат максималног броја итерација



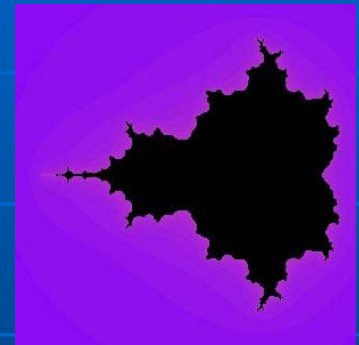
N=4



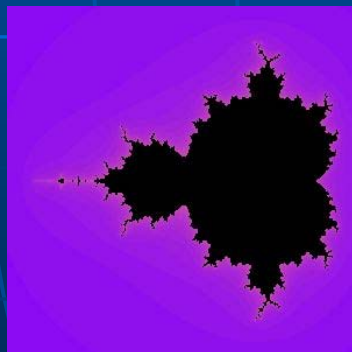
N=5



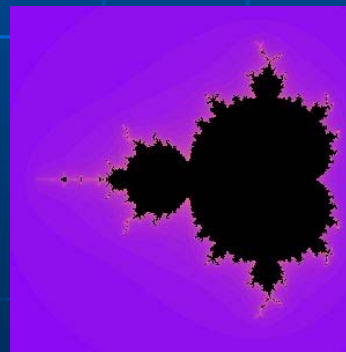
N=6



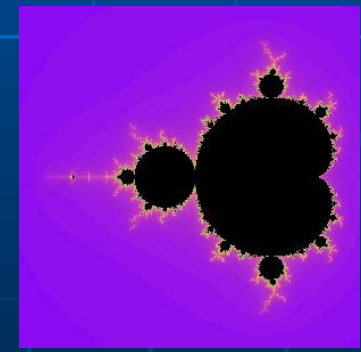
N=10



N=15



N=20



N=150

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

Манделбровов скуп и скупови Џулија

Манделбровов скуп - уопштење

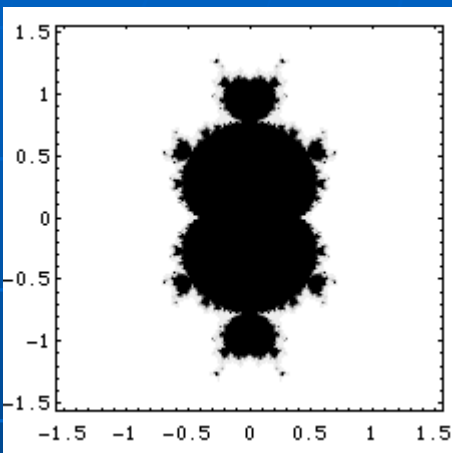
За свако $n > 2$ дефинише се Манделбровов скуп за функцију $f(z) = z^n + c$. Алгоритам генерисања Манделбрововог скупа је исти као и за функцију $z^2 + c$. Стартује се са $z_0=0$ и врши генерисање слике помоћу итеративне формуле $z_n = f(z_{n-1})$.

За функције са више критичних вредности проблем је сложенији.

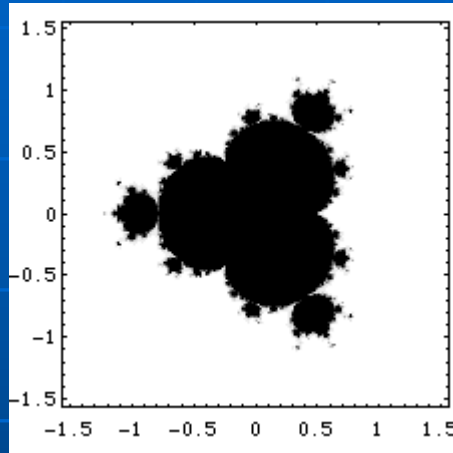
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

Манделбровов скуп и скупови Џулија

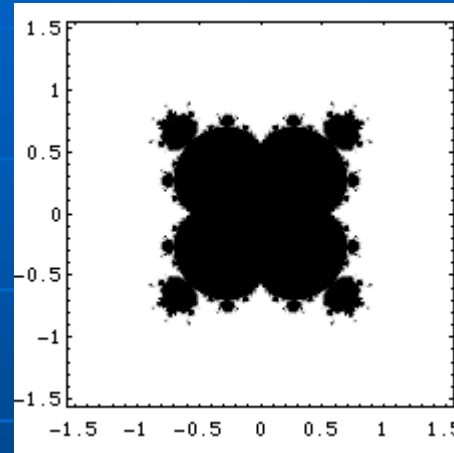
Манделбровов скуп - уопштење



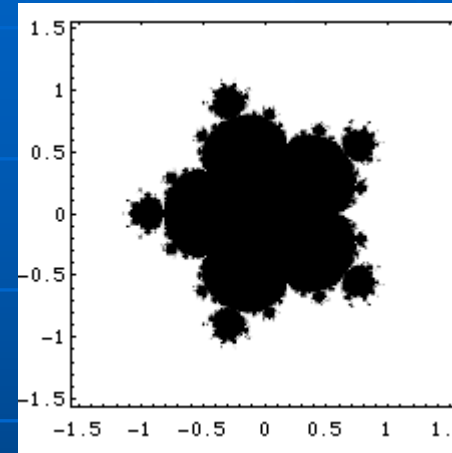
$$z^3 + c$$



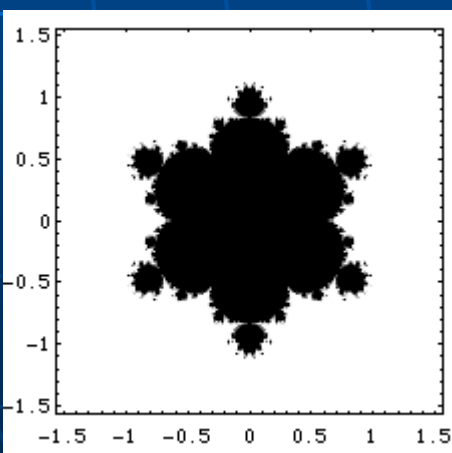
$$z^4 + c$$



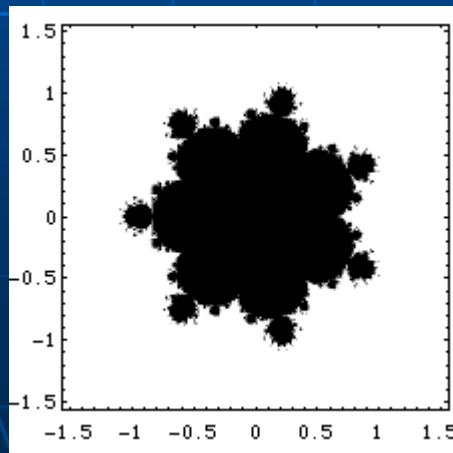
$$z^5 + c$$



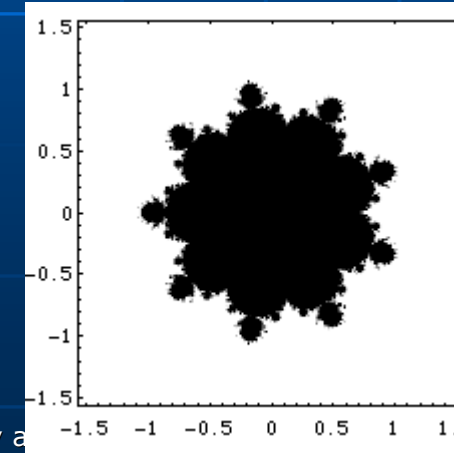
$$z^6 + c$$



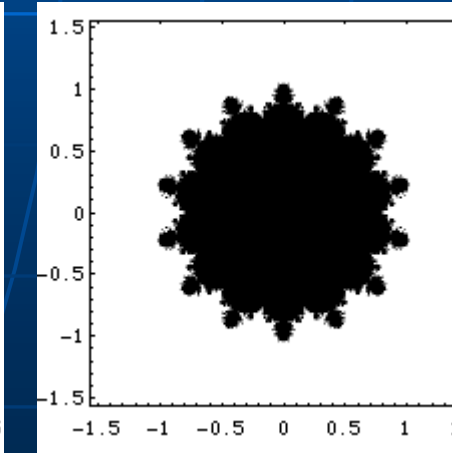
$$z^7 + c$$



$$z^8 + c$$



$$z^{10} + c$$



$$z^{15} + c$$