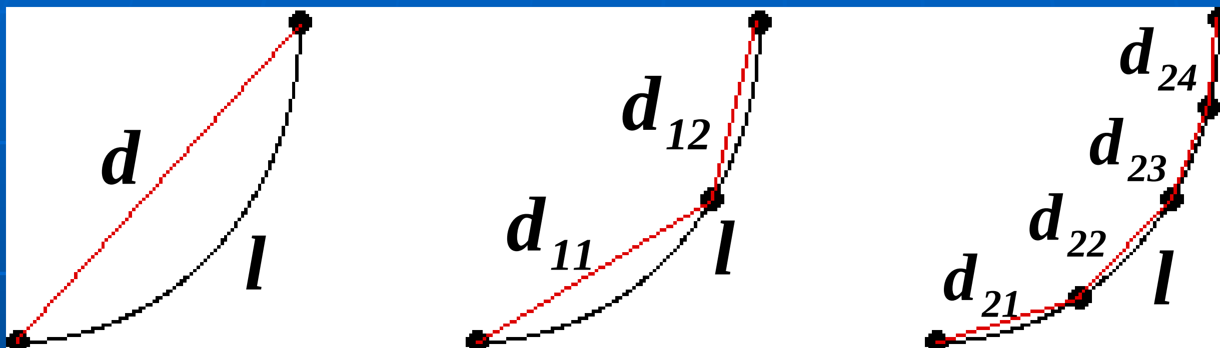
Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

димензија фрактала-увод-дужина криве линије

Најкраће растојање између две тачке је дуж.



$l \geq d$

$l \geq d_{11} + d_{12}$

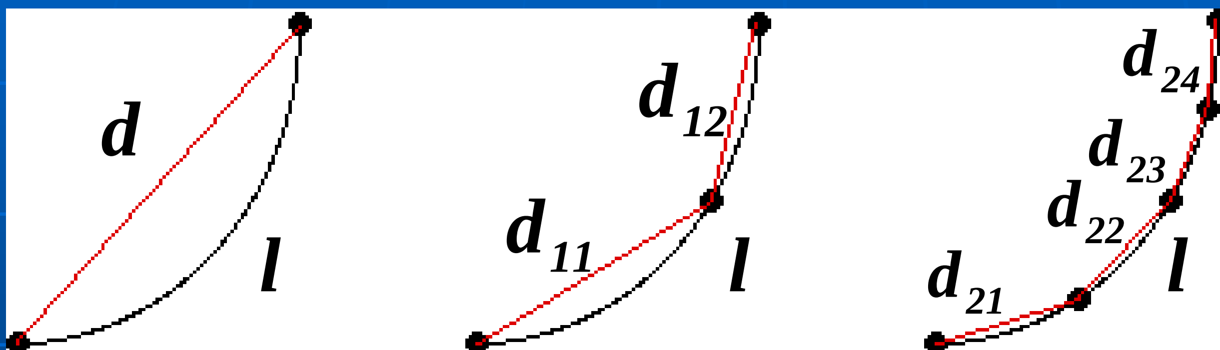
$l \geq d_{21} + d_{22} + d_{23} + d_{24}$

$$d \leq d_{11} + d_{12} \leq d_{21} + d_{22} + d_{23} + d_{24} + \ldots \leq l$$

У граничном процесу, кад број деоних тачака тежи бесконачности, дужине дужи теже нули, а збир њихових дужина тежи дужини криве линије.

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

димензија фрактала-увод-
дужина криве линије

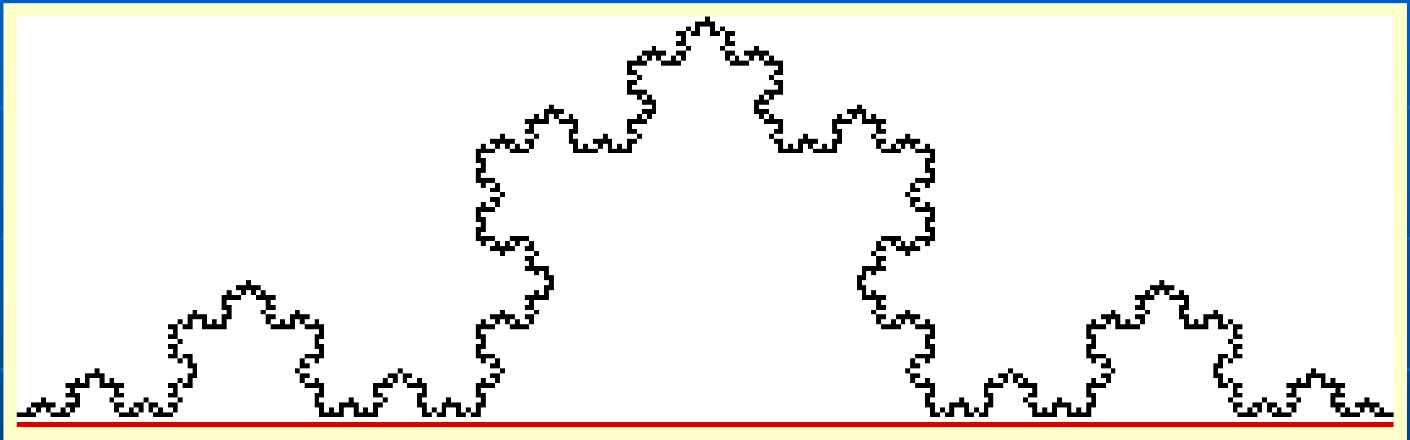


За довољно велики број деоних тачака, крива линија је довољно добро апроксимирана изломљеном кривом линијом (почетне и завршне тачке им се поклапају). Дужина изломљене криве линије представља довољно добру апроксимацију дужине криве.

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

димензија фрактала-увод-
дужина Кохове криве

Најкраће растојање између две тачке је дуж.



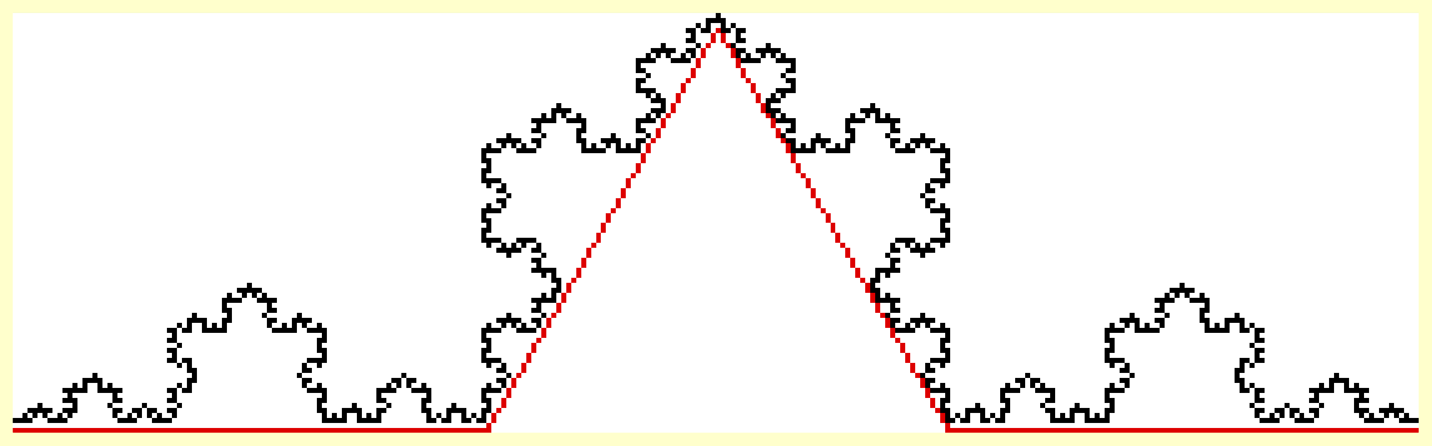
Прва апроксимација дужине Кохове криве је дужина дужи одређене почетном и завршном тачком: L_0 (на пример $L_0 = 1\,m$).

Дужина Кохове криве је већа од $L_0 = 1\,m$

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

димензија фрактала-увод-
дужина Кохове криве

Најкраће растојање између две тачке је дуж.



Додајући три тачке између крајњих тачака Кохове криве добија се изломљена крива линија која се састоји од 4 дужи дужине 1/3.

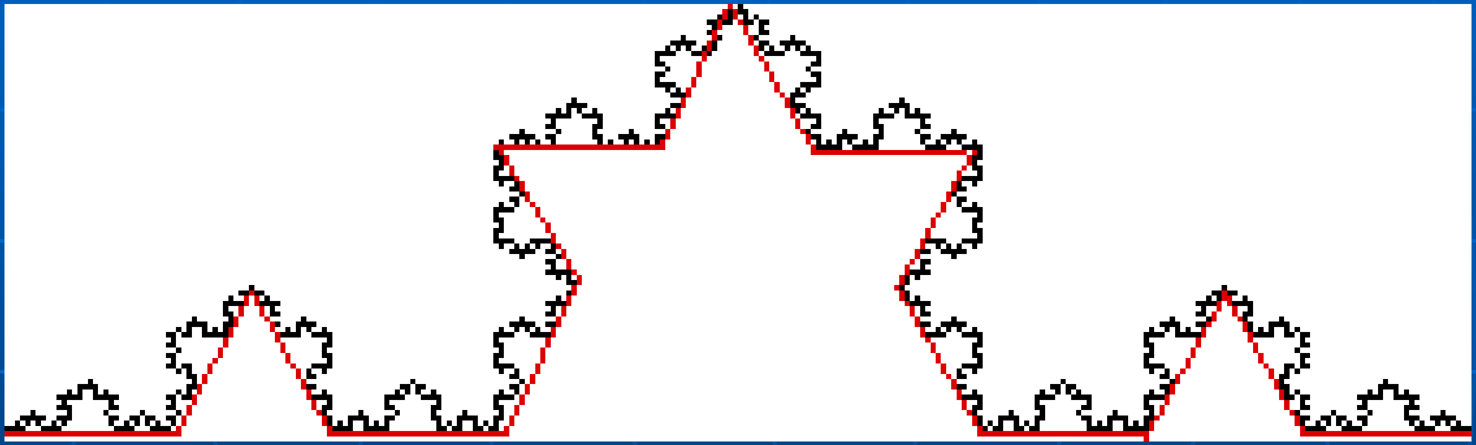
Друга апроксимација: $L_1 = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Дужина Кохове криве је већа од $L_1 = \frac{4}{3}$

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

димензија фрактала-увод-
дужина Кохове криве

Најкраће растојање између две тачке је дуж.



Додајући три нове тачке између сваког пара тачака, добија се изломљена крива линија која се састоји од 16 дужи дужине 1/9.

Трећа апроксимација: $L_2 = 16 \cdot \frac{1}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

Дужина Кохове криве је већа од $L_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод-
дужина Кохове криве

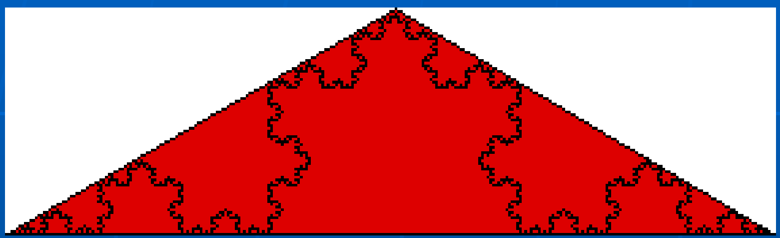
Настављајући процес добија се:

n	Дужина сегмента	Број сегмената	L_n
0	1	1	$L_0 = 1$
1	1/3	4	$L_1 = 4/3$
2	$1/9 = 1/3^2$	$16 = 4^2$	$L_2 = 16/9 = (4/3)^2$
3	$1/27 = 1/3^3$	$64 = 4^3$	$L_3 = 64/27 = (4/3)^3$
…	…	…	…
n	$1/3^n$	4^n	$L_n = (4/3)^n$

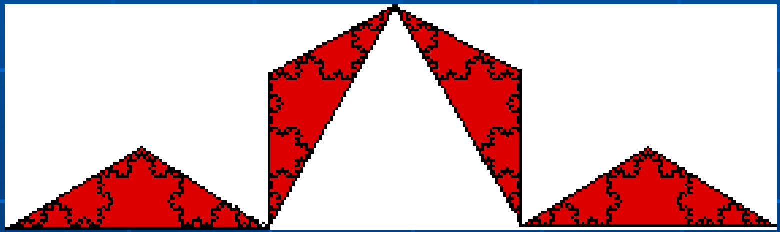
$$\boldsymbol{L \geq L_n \to \infty}$$

Кохова крива је бесконачне дужине.

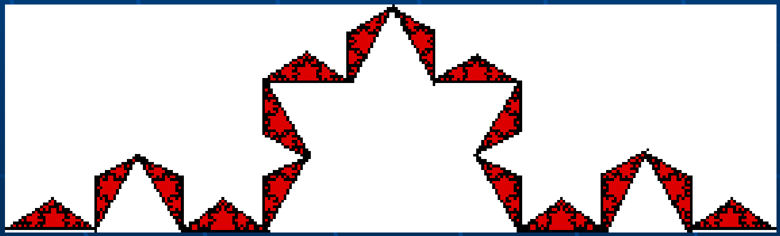
Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод-
површина Кохове криве



$$P \le P_0 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$



$$P \le P_1 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{4}{9}$$



$$P \le P_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод-
површина Кохове криве

Настављајући поступак добија се:

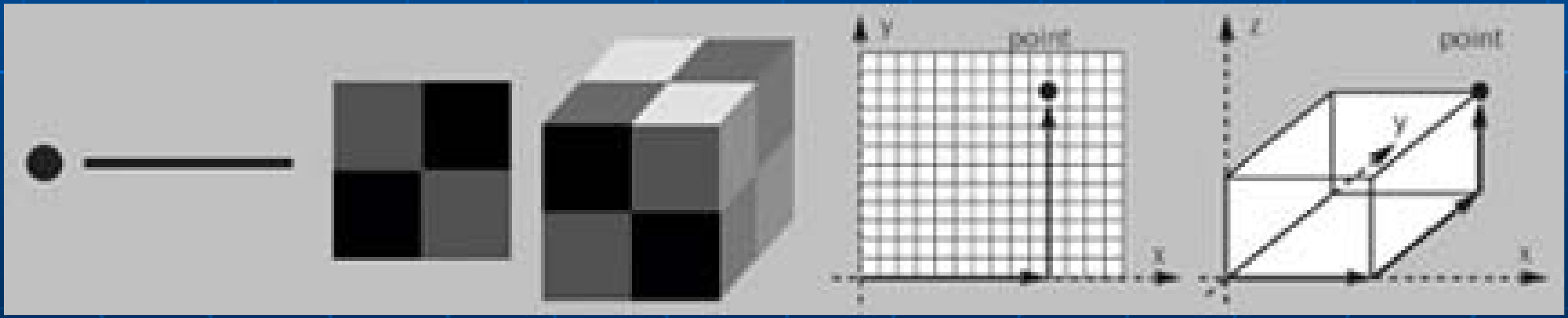
$$P \leq P_n = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$P \leq P_n \to 0,\ n \to \infty \ \Rightarrow \ P = 0$$

Кохова крива бесконачне дужине заузима површину нула.

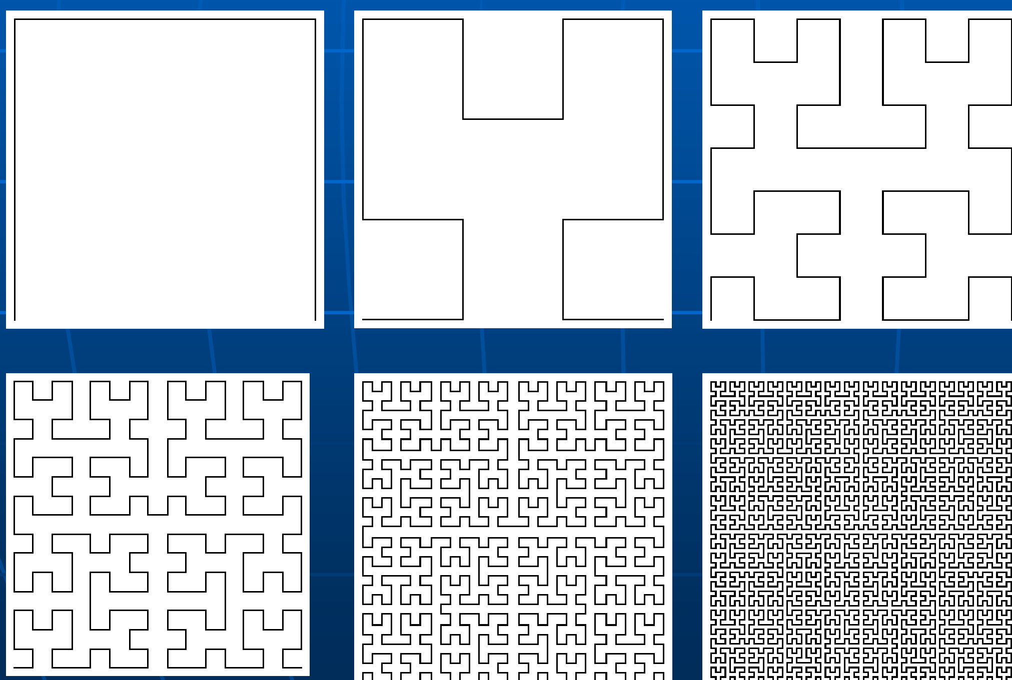
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод
–Еуклидска димензија

Тачка нема дужину, ширину; њена димензија је 0. Еуклидска димензија праве линије је 1, равне фигуре 2; Еуклидска димензија тела у простору је 3. Димензија се доводи у везу са координатним системом у коме се може приказати Еуклидски елемент.



Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод–Хилбртова крива

Парадокс: Подесним савијањем праве линије димензије 1 (Хилбертова крива) попуњава се квадрат димензије 2!



Јавља се идеја димензије фрактала.

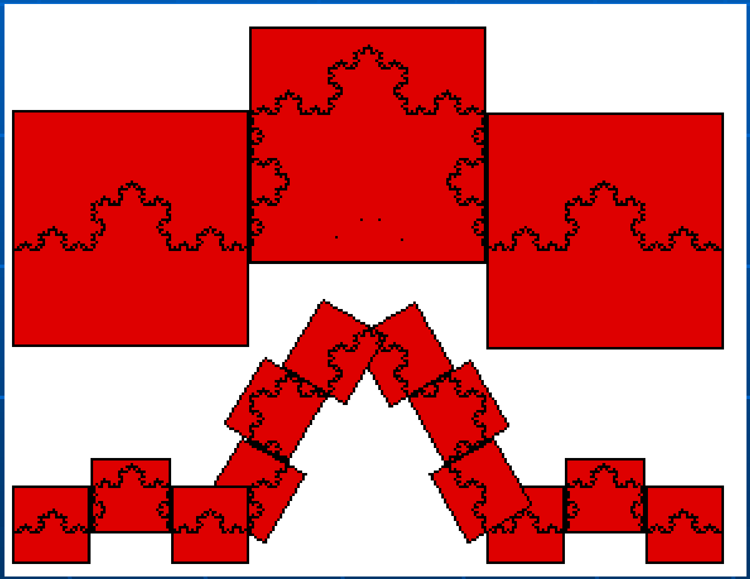
димензија фрактала-увод

Кохова крива бесконачне дужине заузима површину нула.

Овај резултат даје идеју за увођење појма димензије дефинисане помоћу покривања боксовима (кутијама) и утврђивања броја тих боксова.

Боксови су квадрати (или правоуаоници) у равни, коцке (или квадри) у простору.

димензија фрактала - покривање криве линије квадратима



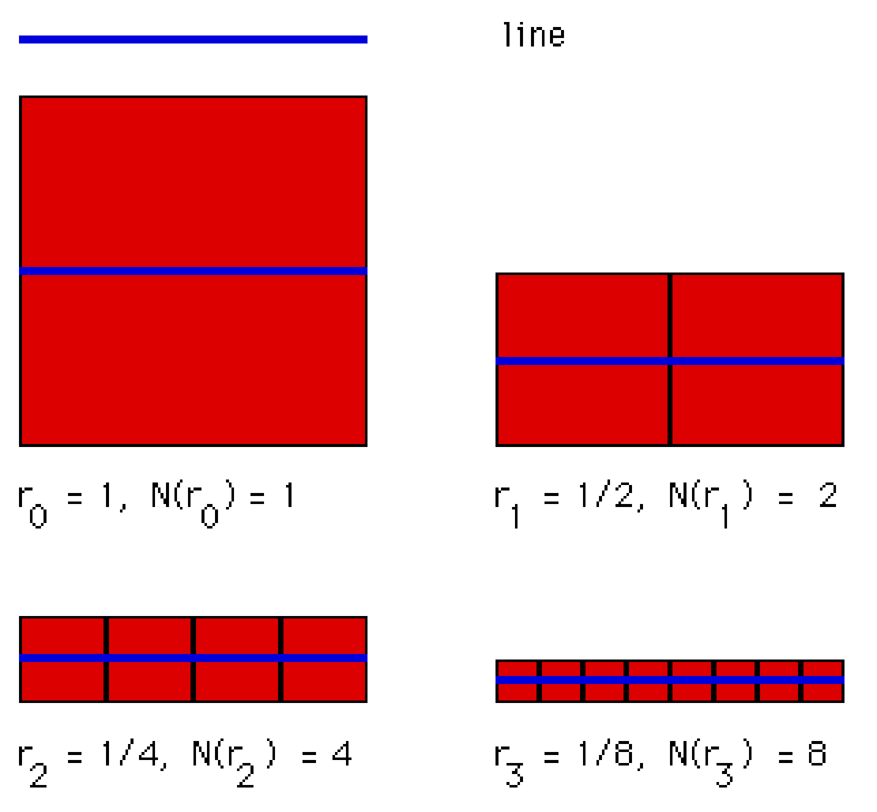
Покривање квадратима странице r

$N(r)$ – број квадрата

$\boxed{N(r)\cdot r}$ апроксимација дужине

$\boxed{N(r)\cdot r^2}$ апроксимација површине

димензија фрактала – покривање праве линије

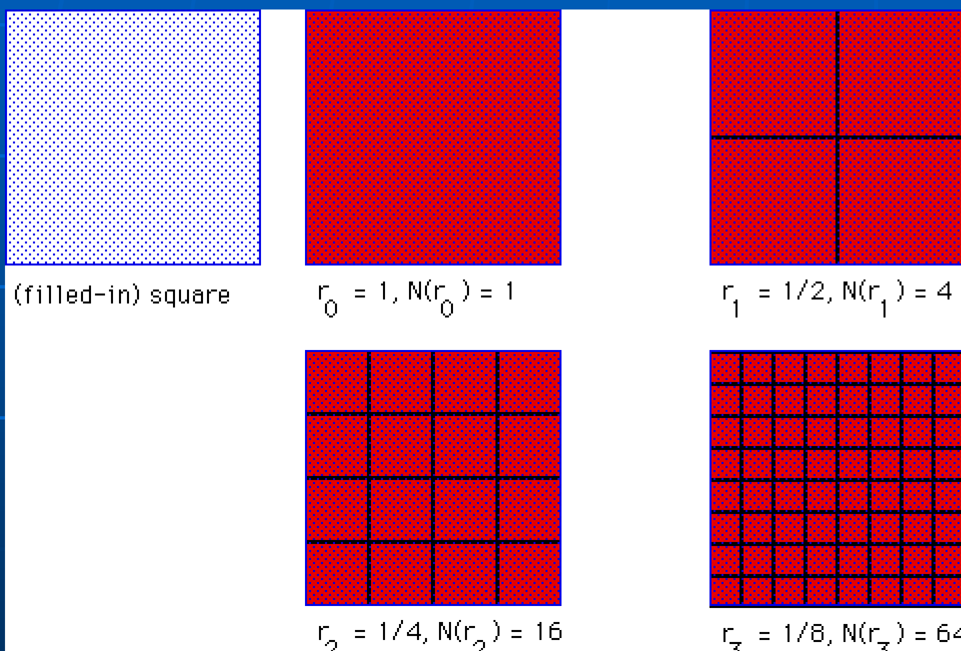


Покривање квадратима странице r

$N(r)$ – број квадрата

$$N(r) = \frac{1}{r}$$

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
димензија фрактала-
покривање квадратне површи



Покривање квадратима странице r

$N(r)$ – број квадрата

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^{2}$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала-покривање коцке

Покривање коцкама странице r

$N(r)$ – број коцки

$$N(r)=\left(\frac{1}{r}\right)^{3}$$

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
димензија фрактала – d_b-димензија

Покривање квадратима
странице r

$N(r)$ – број квадрата

У општем облику за сложене геометријске фигуре – линије – тела апроксимативно

$$N(r) = k \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{d}$$

димензија фрактала – d_b-димензија

$$N(r) = k \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^d$$

$$d = d(r)$$

$$\log N(r) = \log k + d \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log k}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} + d$$

$$d_b = \lim_{r \to 0} \frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

димензија фрактала – d_b-димензија

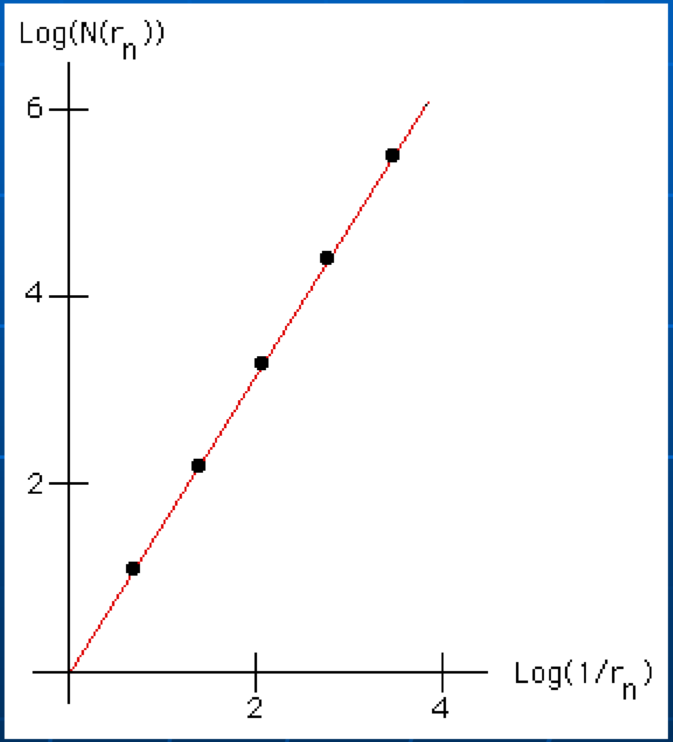
$$d_b = \lim_{r \to 0} \frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

За довољно мало r

$$d_b \approx \frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

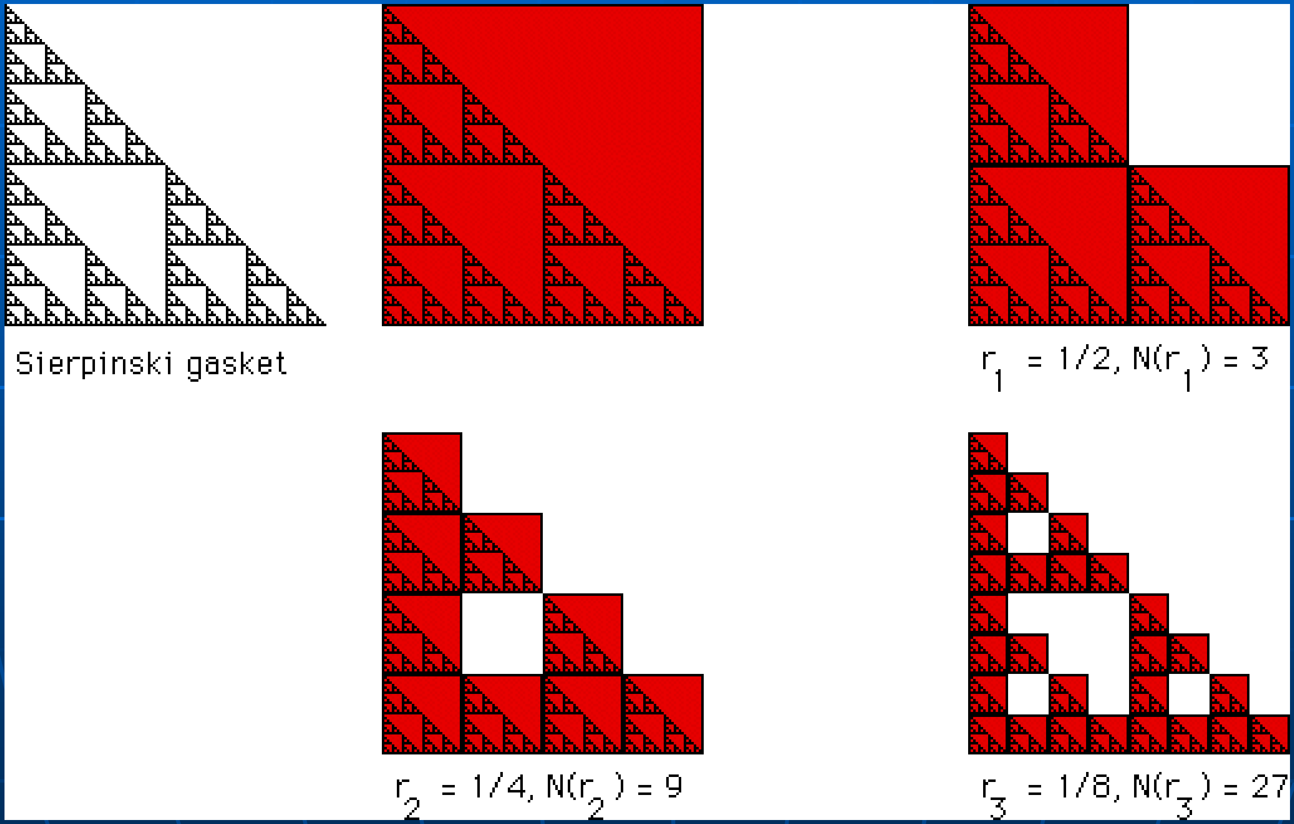
Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
димензија фрактала – d_b-димензија

$$\log N(r) = \log k + d \log\left(\frac{1}{r}\right)$$



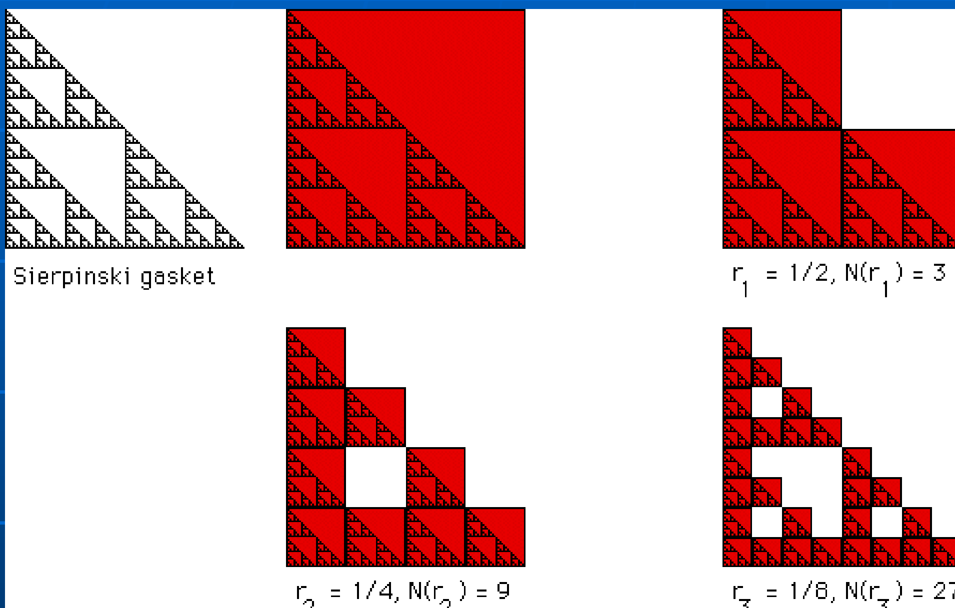
d-коефицијент правца

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
димензија фрактала – d_b-димензија-троугао Сиерпинског



Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

димензија фрактала – d_b-димензија-троугао Сиерпинског



$N(1) = 1$
$N(1/2) = 3$
$N(1/4) = N((1/2)^2) = 9 = 3^2$
$N(1/8) = N((1/2)^3) = 27 = 3^3$
....
$N((1/2)^n) = 3^n.$

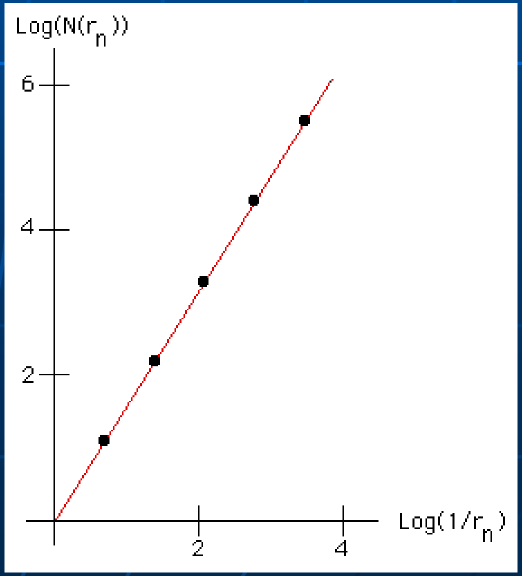
$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log 3}{n \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58996$$

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

димензија фрактала – d_b-димензија-троугао Сиерпинског

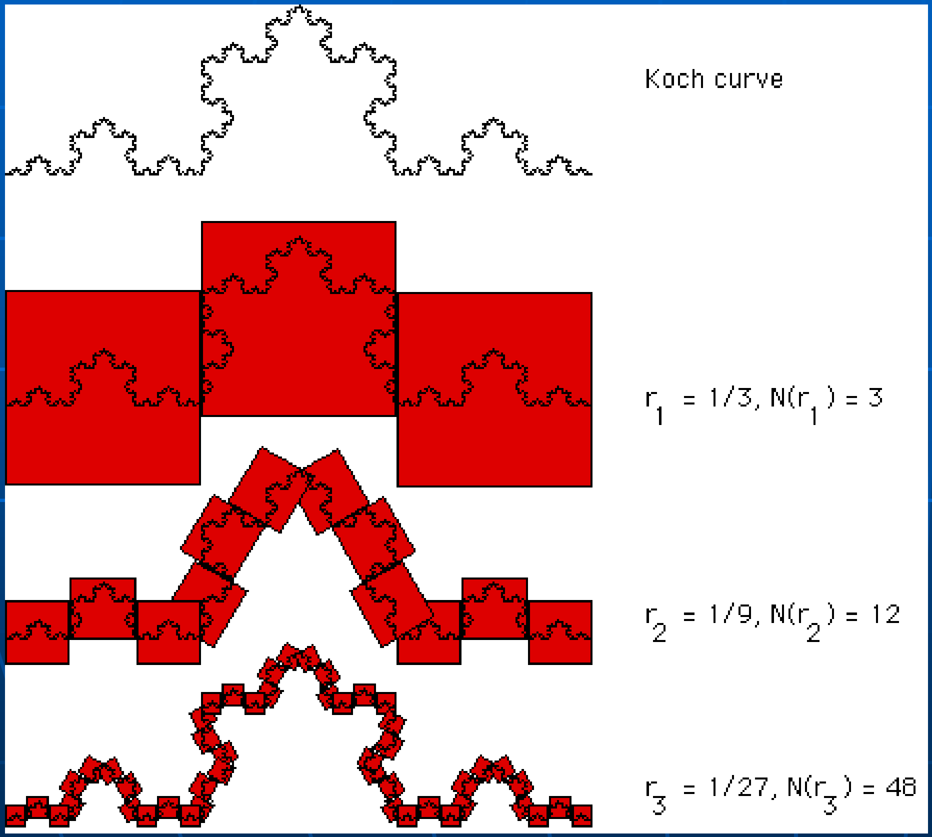
$(\mathrm{Log}(1/r_0), \mathrm{Log}(N(r_0)))$	$= (\mathrm{Log}(1), \mathrm{Log}(1))$	$= (0, 0)$
$(\mathrm{Log}(1/r_1), \mathrm{Log}(N(r_1)))$	$= (\mathrm{Log}(2), \mathrm{Log}(3))$	$= (0.301, 0.477)$
$(\mathrm{Log}(1/r_2), \mathrm{Log}(N(r_2)))$	$= (\mathrm{Log}(4), \mathrm{Log}(9))$	$= (0.602, 0.954)$
$(\mathrm{Log}(1/r_3),\mathrm{Log}(N(r_3)))$	$= (\mathrm{Log}(8), \mathrm{Log}(27))$	$= (0.903, 1.432)$
$(\mathrm{Log}(1/r_4),\mathrm{Log}(N(r_4)))$	$= (\mathrm{Log}(16), \mathrm{Log}(81))$	$= (1.204, 1.908)$

$$d_b = 1.59$$



Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

димензија фрактала – d_b-димензија- Кохова крива



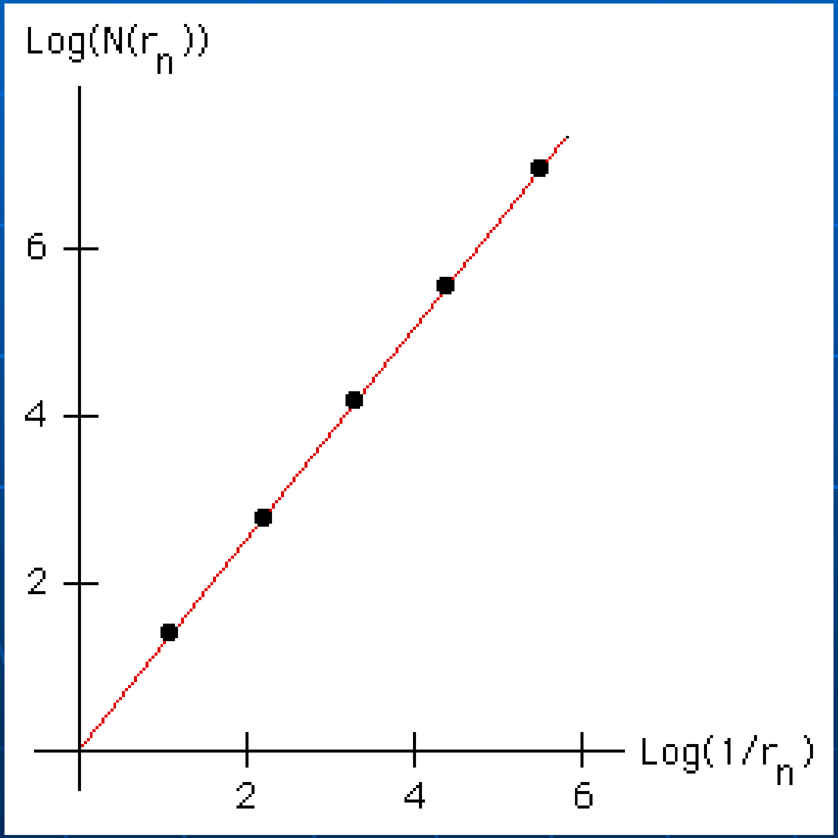
N(1/3) = 3
$N(1/9) = N((1/3)^2) = 3*4$
$N(1/27) = N((1/3)^3) = 3*4^2$
…………
$N((1/3)^n) = 3*4^{n-1}$.

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала – d_b-димензија- Кохова крива

$N(1/3) = 3$
$N(1/9) = N((1/3)^2) = 3*4$
$N(1/27) = N((1/3)^3) = 3*4^2$
....
$N((1/3)^n) = 3*4^{n-1}$.

$(Log(1/r_0),Log(N(r_0)))$	$= (Log(1), Log(1))$	$= (0,0)$
$(Log(1/r_1),Log(N(r_1)))$	$= (Log(3), Log(3))$	$= (0.477, 0.477)$
$(Log(1/r_2),Log(N(r_2)))$	$= (Log(9), Log(12))$	$= (0.954, 1.079)$
$(Log(1/r_3),Log(N(r_3)))$	$= (Log(27), Log(48))$	$= (1.431, 1.681)$
$(Log(1/r_4),Log(N(r_4)))$	$= (Log(81), Log(192))$	$= (1.908, 2.283)$
...		

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
димензија фрактала –
d_b-димензија- Кохова крива



$$d_b = 1.26$$

димензија фрактала –
d_b-димензија- Кохова крива

N(1/3) = 3
$N(1/9) = N((1/3)^2) = 3*4$
$N(1/27) = N((1/3)^3) = 3*4^2$
....
$N((1/3)^n) = 3*4^{n-1}$.

$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3\cdot 4^{n-1}}{\log 3^n}$$

$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3 + (n-1)\log 4}{n\log 3}$$

$$d_b = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{\log 4}{\log 3}\right) = 1.26$$